УДК 519.24+681.5

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ КОТИРОВОК ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Е.В. Истигечева, А.А. Мицель

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: ievne@mail.ru

Рассматривается модель стохастической волатильности. Параметры модели оцениваются методом последовательного анализа. Осуществляется моделирование котировок финансового инструмента на примере европейской валюты.

Введение

В настоящее время одним из самых актуальных направлений прикладной математики является построение математических моделей, адекватно описывающих эволюцию таких финансовых инструментов как акции, облигации, опционы, котировки валют и т. д. В связи с этим становится необходимым изучение свойств, вычисление параметров и определение вида распределения некоторого стохастического процесса, лежащего в основе рыночных флуктуаций.

Известно, что у эмпирической функции плотности распределения, построенной на основе исторических данных, существует ненулевой эксцесс и асимметрия. Кроме того, присутствует вытянутость функции плотности в ε-окрестности точки математического ожидания, а так же наблюдаются так называемые «толстые хвосты», когда вероятность значительных изменений ценовых приращений выше, чем для нормального распределения.

Для изучения распределений таких случайных процессов и прогнозирования будущего уровня их волатильности (изменчивости) было предложено большое количество моделей. Наиболее изученной является модель Блэка-Шоулса для опционов. Данная модель позволяет построить распределение приращений временного ряда, которое уже будет иметь более толстые хвосты по сравнению с нормальным распределением и, как следствие, дает возможность рассчитать волатильность более точно. Тем не менее, хвосты остаются достаточно «тонкими» по сравнению с распределениями данных реальных финансовых рынков, что недопустимо.

В связи с вышесказанным в настоящее время получили развитие другие подходы. Наиболее интересными из них являются методы с использованием фрактального броуновского движения, когда временной ряд представляется в виде фрактала (и, как следствие, становится известен закон построения с регулируемыми величинами начальных и центральных моментов); алгоритмы подгонки функции распределения под распределение значений временного ряда, а так же процесс прогнозирования волатильности с помощью негауссовских моделей типа ARCH (модели с авторегрессионной условной неоднородностью) [1–4], позволяющих проводить анализ кореллированных и высокочастотных данных.

В данной работе рассматривается модель стохастической волатильности (*Stochastic Volatility* – SV) первого порядка SV(1). Для оценивания параметров этой модели в литературе предлагаются метод максимального правдоподобия и обобщенный метод моментов [см., например, 1]. В работе [5] приводится достаточно подробное описание и сравнение этих двух методов применительно к SV-моделям. В данной работе предлагается построить оценки неизвестных параметров методом последовательного анализа. Преимущество данного метода состоит в том, что оценки параметров можно получить с априорно заданной точностью.

Постановка задачи

Пусть

$$S_n = S_0 e^{H_n}$$

– значение цены акций или обменного курса валют в момент времени n, тогда

$$H_n = \ln \frac{S_n}{S_0}.$$

В классе рассматриваемых моделей величина нормированных цен H_n определяется как

$$H_n = y_1 + \ldots + y_n,$$

где

$$y_n = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right).$$

Модель стохастической волатильности определяется как [1]:

$$y_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

где y_n – последовательность наблюдений, ε_n – стандартная гауссовская последовательность, σ_n – стохастическая волатильность. Предполагается, что

$$\sigma_n^2 = \exp(h_n), \quad h_n = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1} + v_n.$$

Здесь v_n – стандартная гауссовская последовательность, которая предполагается независимой от ε_n.

Тогда, процесс h_n будет стационарным при условии $|\alpha_1|<1$, причем

$$E(h_n)=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}, \;\; D(h_n)=\frac{\sigma_v^2}{1-\alpha_1^2}.$$

Очевидно, что

$$E(\varepsilon_n^4)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-x^2/2}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2/2}d(x^2/2)=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}(x^2/2)^{3/2}e^{-x^2/2}d(x^2/2)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}=3,$$

$$Ey_n^2=E\sigma_n^2E\varepsilon_n^2=E\sigma_n^2,$$

$$Ey_n^4=E\sigma_n^4E\varepsilon_n^4=3E\sigma_n^4.$$

Тогда коэффициент эксцесса имеет вид:

$$K=\frac{Ey_n^4}{(Ey_n^2)^2}-3=3\left(\frac{E\sigma_n^4-(E\sigma_n^2)^2}{(E\sigma_n^2)^2}\right)=3\frac{D\sigma_n^2}{(E\sigma_n^2)^2}\geq 0.$$

Положительность величины K свидетельствует о том, что плотность распределения величин y_n в окрестности среднего значения вытянута вверх сильнее и имеет более тяжелые хвосты, чем соответствующее нормальное распределение.

Очевидно, что

$$\ln y_n^2=h_n+\ln\varepsilon_n^2,$$

Известно, что [2]:

$$E(\log\varepsilon_n^2)=-1{,}27;\quad D(\log\varepsilon_n^2)=4{,}93.$$

Общие положения

Рассмотрим возможность построения оценки методом последовательного анализа [6, 7]. Модель SV может быть приведена к системе линейных уравнений без потери информации:

$$z_n=x_n+\eta_n, \tag{1}$$

$$x_n=\alpha_0+\alpha_1x_{n-1}+\nu_n, \tag{2}$$

где

$$x_n=\log h_n,\quad z_n=\log y_n^2-\beta,\quad \eta_n=\log\varepsilon_n^2-\beta.$$

Если шумы ν_n, ε_n являются гауссовскими, т. е. $\nu_n,\varepsilon_n\sim N(0,1)$, то $\beta=-1{,}27$.

Возвращаясь к (1), (2), имеем:

$$z_n=\alpha_0+\alpha_1z_{n-1}+\xi_n, \tag{3}$$

где

$$\xi_n=\eta_n-\alpha_1\eta_{n-1}+\nu_n.$$

Это уравнение может быть переписано в виде:

$$z_n=Z_{n-1}^T\cdot\theta+\xi_n,$$

где

$$Z_n=(1,z_n)^{\mathrm{T}},\quad \theta=[\alpha_0,\alpha_1]^{\mathrm{T}}.$$

Гарантированная оценка θ для строится на основе оценки Юла-Уокера, заданной следующими формулами:

$$\theta_N=G_N^{-1}\sum_{n=2}^{N}Z_{n-2}z_n,$$

$$G_N=\sum_{n=2}^{N}Z_{n-2}Z_{n-1}^T,$$

где G_N^{-1} – это обратная матрица к G_N (которая по предположению существует). Оценка Юла-Уокера используется здесь вместо оценки, полученной методом наименьших квадратов, так как она является асимптотически несмещенной в предположении, что шум $\eta_n\neq0$ в наблюдениях (1). Процедура последовательного оценивания в данном случае проводится в два этапа.

Этап 1.

Выберем такую неубывающую последовательность c_k, что $c_k>1$ и $\lim c_k=+\infty$, при этом

$$\sum_{k\geq1}\frac{1}{c_k}<\infty.$$

По мере наблюдения процесса $\{z_n\}$, последовательно находятся марковские моменты $\tau_k=\tau(c_k)$ по формуле [4]:

$$\tau(h)=\inf\{m\geq2:\sum_{n=2}^{m}\|Z_{n-2}\|^2\geq h>0\}.$$

Здесь $\|\ \|$ – евклидова норма для векторов и матриц, т. е. $\|B\|^2=\mathrm{tr}B\cdot B^{\mathrm{T}}$. Для каждого τ_k, $k\geq1$ модифицированная оценка Юла-Уокера определяется как:

$$\tilde{\theta}(\tau(h))=\tilde{G}_{\tau(h)}^{-1}[\sum_{n=2}^{\tau(h)-1}Z_{n-2}\cdot z_n+\mu(h)\cdot Z_{\tau(h)-2}\cdot z_{\tau(h)}], \tag{4}$$

$$\tilde{G}_{\tau(h)}=[\sum_{n=2}^{\tau(h)-1}Z_{n-2}\cdot Z_{n-1}^T+\mu(h)\cdot Z_{\tau(h)-2}\cdot Z_{\tau(h)-1}^T],$$

где $\mu(h)$ – корректирующий множитель, единственным образом определяющийся уравнением:

$$\sum_{n=2}^{\tau(h)-1}\|Z_{n-2}\|^2+\mu(h)\cdot\|Z_{\tau(h)-2}\|^2=h.$$

Этап 2.

Для того чтобы закончить процедуру, введем параметр $H>0$, характеризующий точность оценивания, и определяющий последовательный план $(N(H),\theta^*(H))$, который состоит из длительности $N(H)$ и оценки $\theta^*(H)$:

$$N(H)=\tau(c_\sigma)+1,$$

$$\theta^*(H)=\left(\sum_{j=1}^{\sigma}b_j\right)^{-1}\cdot\sum_{j=1}^{\sigma}b_j\tilde{\theta}_j.$$

Здесь σ – количество оценок типа (4), вошедших во взвешенное среднее:

$$\sigma=\sigma(H)=\inf\left\{k\geq1:\sum_{j=1}^{k}b_j\geq H\right\},$$

где $b_j=b(c_j)$ определяется следующим образом:

$$b(h)=\begin{cases}h^{-2}\left\|\tilde{G}_{\tau(h)}^{-1}\right\|^{-2}, & \det\tilde{G}_{\tau(h)}^{-1}>0,\\ 0, & \det\tilde{G}_{\tau(h)}^{-1}=0.\end{cases}$$

В работе [6] было показано, что для любого $H>0$ последовательный план $N(H),\theta^*(H)$ обладает следующими свойствами:



Рисунок. *Сравнение исторических и модельных значений котировок курса евро (дневные цены закрытия) за период с 1 июня 2004 г. по 21 апреля 2006 г.*

1. $N(H)<\infty$ с вероятностью почти наверное;

2. $\sup \mathrm{E}\left\|\theta^*(H)-\theta\right\|^2 \le \frac{\rho}{H}, \quad \rho = 2(\sigma_\nu^2 + 2\sigma_\eta^2)\sum_{k\ge1}\frac{1}{c_k}.$

Анализ эмпирических данных

Применим метод стохастической волатильности для моделирования временного ряда y_n котировок европейской валюты, рисунок.

Отметим, что $y_n=\ln(S_n)-\ln(S_{n-1})$, n=1,2,3..., обладают следующими параметрами: среднее – $1{,}411\cdot10^{-4}$, дисперсия – $4{,}32\cdot10^{-5}$, коэффициент асимметрии – 0,092, куртозис (эксцесс) – 1,747.

Параметры модели для данного временного ряда: α_0=0,000561 и α_1=0,998712; похожие результаты для котировок японской йены были получены в работе [1].

После моделирования прогнозных данных с использованием модели стохастической волатильности была рассчитана относительная погрешность δ_n между исходными данными и полученным прогнозом:

$$\delta_n = \left|S_n^{SV} - S_n\right| S_n^{-1}.$$

величина δ_n не превосходила 2,5 %.

Анализ рисунка дает основание сделать вывод о том, что модель стохастической волатильности удовлетворительно описывает исходные данные и позволяет моделировать их значения с небольшой погрешностью.

Выводы

Получены оценки параметров в модели стохастической волатильности методом последовательного анализа на основе оценки Юла-Уокера. Важными свойствами этой оценки является то, что она строится с априорно заданной среднеквадратической точностью и процедура построения оценки сходится при любых начальных значениях параметров модели. Кроме того, SV-модель использована для имитационного моделирования котировок курса евро. Показана высокая эффективность модели стохастической волатильности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шепард Н. Статистические аспекты моделей типа ARCH и стохастическая волатильность // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1996. – Т. 3. – Вып. 6. – С. 764–826.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. – Т. 1. – Факты. Т. 2. – Модели. – М.: Фазис, 1998. – 512 с.
3. Engle R.F. Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models // Journal of Business and Economic Statistics. – 1994. – V. 12. – № 4. – P. 395–397.
4. Ширяев А.Н. Вероятностно-статистические модели эволюции финансовых индексов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1995. – Т. 2. – Вып. 4. – С. 527–555.
5. Jacquier E., Polson N.G., Rossi P.E. Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion) // Journal of Business and Economic Statistics. – 1994. – V. 12. – № 4. – P. 371–417.
6. Konev V.V. Guaranteed estimation of parameters in stochastic volatility models // 26th International congress of actuaries: Proceeding. – 1998. – V. 7. – P. 121–135.
7. Истигечева Е.В. Гарантированное оценивание параметров стохастической волатильности // Научная сессия ТУСУР – 2006: Матер. докладов Всеросс. научно-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. – Томск, 2006. – Т. 5. – С. 219–221.